Hertentamen 2 Computerondersteund Probleemoplossen

Docent: Kurt Lust

ma. 29 oktober, 9.00-12.00 uur

Dit is een gesloten boek tentamen. Je hebt dus enkel je eigen schrijfgerief en eventueel een rekenmachine nodig. Deze moet voldoen aan de eisen voor het VWO-eindexamen.

Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. Alle antwoorden moeten goed gestructureerd en gemotiveerd zijn. De gevolgde werkwijze moet duidelijk zijn. Wanneer je een stukje programma moet schrijven, doe dat dan volgens de regels besproken in de cursus (zinvolle namen voor variabelen, commentaar, ...).

Het tentamen wordt eerst gequoteerd op 100 punten. 10 punten krijg je zowiezo, de resterende 90 moet je verdienen. De punten staan aangegeven bij elke vraag. Wanneer je minimum 45 punten haalt voor het tentamen, wordt voor het berekenen van het eindresultaat een gewogen gemiddelde gemaakt met de punten van de practica (60% tentamen, 40% practica). Anders wordt je eindscore enkel aan de hand van het tentamen bepaald en heb je dus een onvoldoende.

Gelieve **op ieder blad** Uw naam, studentennummer en studierichting te vermelden. Begin iedere vraag op een nieuwe bladzijde en maak geen puzzel van Uw oplossing. Veel succes!

Vraag 1 $\boxed{\text{15 punten}}$ Beschouw de Runge-Kutta methode

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(y_n, t_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left(f(y_n, t_n) + f(\bar{y}_{n+1}, t_{n+1})\right) \end{aligned}$$

voor de differentiaalvergelijking $y' = f(y,t)$.

a) Wat wordt dit schema voor de testvergelijking $y' = \alpha y$?

b) Bepaal de orde van de lokale fout die we maken met dit schema.

c) Voor welke reële waarden van αh is dit schema stabiel? Is het schema absoluut stabiel?

Vraag 2 $\boxed{\text{20 punten}}$

a) Leg in enkele regels de betekenis van de begrippen conditie en stabiliteit uit. Het is niet nodig hierbij een voorbeeld te geven of lange afleidingen te maken.

b) De oplossingen van de kwadratische vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ waarbij $b^2 - 4ac > 0$ kunnen we berekenen met de formules

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

We krijgen echter problemen als $|ac| \lll b^2$. Leg uit wat er precies misloopt. Heeft dit te maken met conditie of met stabiliteit? Kan je dit probleem verhelpen, en zo ja, hoe?

Vraag 3 $\boxed{\text{20 punten}}$ We hebben 3 methoden gezien om de kleinste kwadraten oplossing van een overgedetermineerd stelsel $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$) op te lossen. Veronderstel dat rang $\boldsymbol{A} = n$.

Zie ommezijde

a) Één methode is de methode via het normaalstelsel. Hoe werkt deze methode? Welke andere algoritmes gebruik je om eventuele deelproblemen op te lossen?

b) Welke zijn de twee andere methoden? Geef aan hoe die werken. Hoe kan je de formules afleiden uit het normaalstelsel? Welke andere numerieke technieken uit de cursus kan je gebruiken om deelproblemen op te lossen?

c) Welk van de drie methodes heeft de grootste problemen met numerieke stabiliteit en waarom? Hebben de andere methodes soortgelijke problemen?

Vraag 4 $\boxed{\text{20 punten}}$ Gegeven: Een vierkante niet-singuliere bovendriehoeksmatrix $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en een rechterlid $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Schrijf een Matlab *functie* die de oplossing van het stelsel $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{b}$ berekent. Invoerargumenten zijn R (voor de matrix $\boldsymbol{R}$) en b (voor de vector $\boldsymbol{b}$), het uitvoerargument is x (de vector $\boldsymbol{x}$). R wordt opgegeven als een vierkante matrix (in een array dus) waarbij je mag aannemen dat alle elementen onder de diagonaal 0 zijn. Je hoeft dat dus niet te testen.

Vraag 5 $\boxed{\text{15 punten}}$ Beschouw de functie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 5 - 12x + 9x^2 - 2x^3 & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

Voor deze functie geldt $0 \le f(x) \le 1$. Verder is de functie continu en is ze monotoon strikt stijgend op $(1, 2)$. Schrijf een Matlab functie met als invoerargument een (kolom)vector x en als uitvoerargument een vector y van dezelfde grootte waarbij $y_i = f(x_i)$.
Opmerking: Je kan dit doen zonder gebruik te maken van een lus, maar dit vereist wat inventiviteit. Een oplossing met lus wordt niet afgestraft.